203 – Utilisation de la notion de compacité

On commence par présenter des résultats généraux sur les compacts, et plus on avance dans le plant, plus on trouvera d'applications des résultats précédents.

I) La notion de compacité

1) Dans un espace topologique (X,T)

Déf : (X,T) est compact ssi il est séparé + BL ssi séparé + PIF [Analyse L3 31]

Déf : (X,T) est relativement compact

Déf : localement compact [Analyse L3 36]

Déf : une partie A compacte (rep loc comp, resp rel comp ssi (A,T_induite) est compact (resp loc comp, rep rel comp) [Analyse L3 31]

Rq : ces trois notions sont des pptés topologiques stables par homéo [Analyse L3 32]

Ppté : A compact => A fermé [Analyse L3 32] *(si A=X c'est ok, sinon on prend x dans X\A ; pour tout y dans A, comme X est séparé, on trouve Uy et Oy des vois disjoints de y et x. (Uy) est un recouvrement de A dont on extrait un recouvrement fini. L'intersection finie O des Oy reste un vois de x. L'union U des Uy reste disjointe O, et comme A est incluse dans U, O et A sont disjoints, ie O est dans E\A. O est donc un vois ouvert de x dans E\A donc E\A est ouvert donc A fermé)*

Csq : A compact => A relativement compact

Ppté : F fermé dans compact => F compact [Analyse L3 33] *(Fi une famille de fermés de F d'intersection vide. F est un fermé de X donc les Fi sont des fermés de X. X compact donc on en extrait une sous famille finie d'intersection vide)*

Ppté : une réunion finie de compacts est compacte, de même qu'une intersection et qu'un produit (Tychonov) [Analyse L3 33] *(facile pour la réunion ; pour l'intersection, l'intersection des K_i est fermée dans un K_i0 donc compacte ; pour le produit c'est compliqué)*

2) Dans un espace métrique

Rq : un espace métrique est séparé

Th : (E,d) compact ssi toute suite à une va (BW) [Analyse L3 79] *(démonstration assez longue et technique)*

Déf : précompact

Prop : compact = précompact + complet [Analyse L3 92] *(compact=>précompact+complet est clair parce qu'une suite de Cauchy qui a une va converge. Pour l'autre sens, on mq dans un espace précompact toute suite a une suite extraite de Cauchy, qui va converger puisque c'est complet, et donc toute suite a une va)*

Csq : dans un em, compact => fermé borné *(car un précompact est borné)*

3) Dans un evn

Th : (Riesz) un evn est localement compact ssi il est de DF [Analyse L3 123] *(un evn de DF est homéo à K^n qui est loc comp. Réciproque plus compliquée, n'utilise pas l'équivalence des normes)*

Cor : un evn est de DF ssi sa boule unité fermée est compacte [Analyse L3 123] *(là on utilise l'équivalence des normes, et la compacité de la boule pour la norme infinie dans K^n)*

Cor : les compacts d'un evn de DF sont les fermés bornés [Analyse L3 123] *(un sens montré précédemment. L'autre : si K fermé borné, il est inclus dans une boule fermé, qui est compacte par Riesz, donc K compact car fermé dans compact)*

II) Continuité et convergence

On se place dans un espace **métrique** (E,d)

1) Suites

On se place dans un espace **métrique** (E,d)

Prop : (xn) bornée => (xn) a une va. Si de plus cette valeur d'adhérence est unique, alors (xn) cv vers elle *(a cette unique va. Pour tout e>0, il existe un nb fini de termes de la suite en dehors de B(a,e), sinon on pourrait en extraire une sous suite qui convergerait vers une autre va. Du coup pour tout e, il existe forcément un N tq pour n>N, xn est dans B(a,e))*

Appl : Sn->Sn++ est un homéomorphisme par exp [MT 62] *(pour montrer la bicontinuité)*

2) Continuité et uniforme continuité

Th : f :E->E' continue. A compact de E. Alors f(A) compact de E' *(reste vrai dans un esp top si X' séparé)*

Cor : une fonction continue f :X->R est bornée et atteint ses bornes [Analyse L3 35] *(l'image de la fonction est un segment)*

Appl : (théorème de Rolle) si f continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[et que f(a)=f(b) alors la dérivée s'annule *(f est bornée par m et M atteints en c1 et c2. Si m=M f=cste et c'est bon, sinon comme f(b)=f(a) l'un des deux c_i est à l'intérieur du segmt et la dérivée s'y annule) (Rq : Rolle est utile dans la démo des AF, de Taylor Lagrange…)*

Th : f :X->X' avec X compact, f continue et injective. Alors f est un homéo de E sur f(E) *(vrai sur espace top)*

Th : (Heine) toute fonction continue sur un compact est UC [Analyse L3 81] *(idée assez générale : on fixe epsilon, pour tout x il existe un voisinage alpha_x tq où f(y) est epsilon proche si x et y sont alpha_x proches, on extrait un sous recouvrement des voisinages, on prend le min et c'est bon)*

Appl : l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans l'ensemble des fonctions continues [Gou]

3) Suites et séries de fonctions

Dini 1 : si (fn) est une suite croissante de fct continues sur un sgmt qui cv simplement vers une fct continue alors la cv est unif *(utilise qu'un intersection décroissante de compacts non vide est non vide ; sert pour SW)*

Dini 2 : si chaque fn est croissante et qu'il y a cv, pareil *(uniforme continuité)*

Th : fn cv sur tout compact, fn continues => f continues

Th : fn cv simplement vers s, fn' cv unif sur tout compact vers g => f C^1 et f'=g

Th : primitives

4) Théorème d'Ascoli

Déf : équicontinuité

Th : (Ascoli) X compact, E em complet. F une famille d'appl continues de X dans E. Si F est équicontinue et que pour tout x de X, F(x) est relativement compact, alors F est rel comp pour la norme infinie [Analyse L3 145] *(dans le cas où E est un evn de DF, rel comp=borné donc on peut remplacer dans l'énoncé)*

Appl : Arzela Peano [ZQ]

5) Approximation

a) *Approximation des fonctions continues*

Prop : polynômes de Bernstein [Les] *(on utilise l'uniforme continuité)*

Cor : th de Weierstrass

Th : SW *(on utilise Dini + les recouvrements)*

b) *Approximation dans les espaces L^p*

Th : l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans l'ensemble des fonctions L^p [Far]

III) Compacité et groupes topologiques

1) Groupes classiques

Les groupes O(n), SO(n), U(n), SU(n) sont compacts

2) Action de groupes

Théorème d'homéomorphisme : si G compact agit transitivement et continûment sur un espace topologique X, alors Ox est homéo à G/Gx

Déf : dénombrable à l'infini = réunion dénombrable de compacts

Théorème d'homéomorphisme version forte : si G est localement compact, dénombrable à l'infini, qu'il agit continûment et transitivement sur X espace topologique localement compact alors Ox est homéo à G/Gx

Prop : H un sous groupe de G. H compact et G/H compact (resp connexe) => G compact (resp connexe)

Appl : SO(n) et SU(n) sont connexes *(on fait agir ces groupes sur la sphère, on montre que la sphère est homéo à SO(n)/SO(n-1) et on conclut par récurrence ; en fait U(n) est connexe car U(n)/SU(n) est homéo à S^1. On utilise le petit th d'homéo)*

Appl : Or est connexe (orbite du rang) *(action de GLm x GLn sur les matrices de rang r ; action transitive. Donc par gros th d'homéo, on a homéo entre Or et GLm x GLn / stab, donc connexité)*

3) Sous groupes compacts de GLn(C)

Lemme : l'enveloppe convexe d'un compact est compacte [Ale] *(repose sur le théorème de Carathéodory)*

Th : soit G un sous groupe compact de GLn(C). Alors il existe une forme quadratique définie positive q_G tq G inclus dans O(q_G) [Ale]

Développements :
1 - Sous groupes compacts de GLn(R) [Aless 141] (***)
2 - SW [Analyse L3 141] (***)
3 - RFK [HL] (**)

Bibliographie :
[Analyse L3] Marco – Mathématiques L3 Analyse
[Les] Lesigne - Pile ou face
[Gou] Gourdon – Analyse

[Far] Faraut – Calcul intégral
[ZQ]
[Ale] Alessandri – Thèmes de géométrie

Rapport jury 2005-2009 :
Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale, sans proposer des exemples significatifs d'utilisation.
Confusion entre la notion de compacité et l'utilisation de la compacité. Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale, sans proposer des exemples d'utilisation significatifs. On ne peut pas proposer en développement des théorèmes de caractérisation de la compacité, a contrario le théorème de Stone-Weierstrass, par exemple, trouve largement sa place dans cette leçon.
Dans cette leçon, il est souhaitable de présenter un théorème utilisant la méthode diagonale ; les candidats n'ont que l'embarras du choix : théorèmes d'Ascoli, de Montel, compacité faible séquentielle de la boule unité d'un espace de Hilbert, etc.

Questions jury 2010 :
- K compact d'un evn de DF. le complémentaire de K est-il connexe ? Et si l'evn est de dimension infinie, mq que le complémentaire est tj connexe.
- un truc avec des idéaux stricts de C(K,R) où K est un compact
- comment vous montrez Tychonoff (produit fini)